WYŻSZA SZKOŁA ADMINISTRACJI I BIZNESU
W GDYNI

ZADANIA Z MATEMATYKI DLA STUDENTÓW KIERUNKÓW EKONOMICZNYCH

GDYNIA 2003

PIOTR DUDZIŃSKI

ZADANIA Z MATEMATYKI DLA STUDENTÓW KIERUNKÓW EKONOMICZNYCH

GDYNIA 2003

Piotr Dudziński, Zadania z matematyki dla studentów kierunków ekonomicznych, Gdynia 2003, s. 84, bibliografia 5 poz. Skrypt zawiera rozwiązania przykładowych zadań z analizy matematycznej i algebry liniowej. Do każdego rozdziału są dołączone zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania oraz przykłady testów wielokrotnego wyboru dotyczących danego tematu i przykładowe kolokwia (także w formie testów wyboru). Na końcu książki są zamieszczone odpowiedzi do wszystkich zadań.

Opracowanie komputerowe: dr PiotrDudziński

Recenzent: prof. dr hab. Andrzej Borysowicz

Druk:
Drukarnia Wydawnictwa Diecezji Pelplińskiej „Bernardinum"
w Pelplinie

ISBN 83-918369-0-8

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Niniejszy skrypt jest adresowany do studentów pierwszego roku studiów w Wyższej Szkole Administracji i Biznesu w Gdyni i oparty jest na wykładzie z matematyki jaki tam jest prowadzony. Materiał jaki jest omawiany pozwala jednak na korzystanie z książki także przez studentów kierunków ekonomicznych innych uczelni.

Opanowanie przez studentów przedmiotu jakim jest matematyka wymaga pracy zarówno w trakcie zajęć w szkole, jak i samodzielnego rozwiązywania zadań w domu. Prezentowana książka jest pomyślana jako pomoc zarówno w jednym, jak i w drugim. Każdy rozdział zawiera na początku szczegółowe rozwiązania szeregu typowych zadań z danego zakresu partii materiału, co pozwala na samodzielną ich analizę. Do każdego rozdziału jest dołączona duża ilość zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania. Na końcu książki są zamieszczone odpowiedzi do wszystkich zadań. Każdy rozdział kończy się przykładami testów wielokrotnego wyboru dotyczących danego tematu. Ponadto dołączone zostały propozycje przykładowych kolokwiów (także w formie testów).

Rozdział 1

GRANICE CIĄGÓW, GRANICE FUNKCJI, CIĄGŁOŚĆ

Zadanie 1. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{6n^3 - 4n^2 + 3n - 7}{2n^3 + n^2 - n + 3}$,

b) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$,

c) $a_n = \dfrac{2 \cdot 3^n + 2^n}{3^n - 3 \cdot 2^n}$,

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+2}}{n+1}$.

Rozwiązanie.

a) Rozważane wyrażenie jest typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, więc przekształcamy je upraszczając w liczniku i mianowniku ten składnik mianownika, który najszybciej dąży do ∞, w tym przypadku jednomian n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - 4n^2 + 3n - 7}{2n^3 + n^2 - n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(6 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{7}{n^3})}{n^3(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}} =$$

$$= \frac{6}{2} = 3.$$

b) Dany ciąg przedstawia wyrażenie typu $\infty - \infty$. Przekształcamy je mnożąc i dzieląc przez wyrażenie $\sqrt{n^2+1} + n$:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)\cdot(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 2^n}{3^n - 3 \cdot 2^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2 + \frac{2^n}{3^n})}{3^n(1 - 3 \cdot \frac{2^n}{3^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + (\frac{2}{3})^n}{1 - 3 \cdot (\frac{2}{3})^n} = 2$, bo $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$ gdy $n \to \infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n+2}}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(4+\frac{2}{n^2}\right)}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{4} = 2.$

Zadanie 2. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n+4^n}$,
b) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$,
c) $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{4n+1}$.

Rozwiązanie.

a) Przekształcamy wyrażenie następująco: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n\left(\frac{3^n}{4^n}+1\right)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}$, bo $\sqrt[n]{4^n} = 4$ oraz $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Wiadomo, że $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ przy $n \to \infty$, więc $\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} \to 1$. Ostatecznie, $\lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} = 4$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^5 = \mathrm{e}^5.$

c) Zacznijmy od przekształcenia postaci wyrazu ciągu: $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{4n+1} =$ $\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{4n+1} = \left[\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{-\frac{2}{n}\cdot(4n+1)}$. Jako że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{-2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2}{n}\cdot(4n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-8n-2}{n} = -8$, otrzymujemy ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{-\frac{2}{n}\cdot(4n+1)} = \mathrm{e}^8$$

Zadanie 3. Obliczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$.

Rozwiązanie

a) Obliczana granica stanowi typ nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{3}{4}$

c) Przekształcamy dane wyrażenie następująco:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2+\sqrt{x+2}}=-\frac{1}{4}.$$

Zadanie 4. Zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & dla \quad x\neq 2\\[2mm] 4 & dla \quad x=2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3x^2-x-1 & dla \quad x<1\\ 5x-3 & dla \quad x\geq 1\end{cases}$

Rozwiązanie.

a) Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \neq 2$ jako iloraz funkcji ciągłych. Osobnego sprawdzenia wymaga ciągłość w punkcie $x = 2$. Warunek ciągłości w tym punkcie jest następujący: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Obliczamy więc:

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4.$

Z drugiej strony, $f(2) = 4$, więc warunek ciągłości w punkcie $x = 2$ jest spełniony. Podsumowując, funkcja f jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny - taką funkcję nazywamy ciągłą.

b) Aby znaleźć granicę funkcji f w punkcie $x = 1$ obliczamy granice jednostronne w tym punkcie:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 - x - 1) = 1,$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5x - 3) = 2.$

Granice te nie są sobie równe, więc granica funkcji f w punkcie $x = 1$ nie istnieje. Funkcja f nie jest więc ciągła w tym punkcie.

Zadanie 5. Znaleźć równania asymptot funkcji

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4}$,

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x - 1}$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, więc wykres funkcji nie posiada asymptoty pionowej. Aby otrzymać asymptotę poziomą obliczamy granicę funkcji w nieskończoności:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = 2$$

Prosta $y = 2$ jest więc asymptotą poziomą wykresu funkcji f.

b) Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem punktu $x = 1$. Aby sprawdzić, czy jest tam asymptota pionowa obliczamy granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2 + x}{x - 1} = \left[\frac{4}{\infty}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2 + x}{x - 1} = \left[\frac{4}{-\infty}\right] = -\infty.$$

Prosta $x = 1$ jest więc asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f. Teraz zbadamy istnienie asymptoty ukośnej. W tym celu obliczymy dwie granice:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 + x}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 + x}{x - 1} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 4.$$

Prosta $y = 3x + 4$ jest więc asymptotą ukośną wykresu funkcji.

ZADANIA

1. Obliczyć granice ciągów:

(1.1) $a_n = \dfrac{4n^2+5n-2}{3n^2-n+6}$ (1.2) $a_n = \dfrac{7n^2-3n+2}{5n^2+1}$

(1.3) $a_n = \dfrac{5n^3+n^2+2n-1}{3n^3+2n^2+n+8}$ (1.4) $a_n = \dfrac{11n^5-3n^3+2n-1}{9n^5+3n^4+4n^3-3n^2+3}$

(1.5) $a_n = \left(\dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+5n+2}\right)^2$ (1.6) $a_n = \left(\dfrac{8n^3+n^2-n+1}{2n^3+n+1}\right)^3$

(1.7) $a_n = \dfrac{-5n^3+6n^2-3n-2}{2n^4+n^2+1}$ (1.8) $a_n = \dfrac{2n^4-n^2+2}{n^6-9n^4+3n^2-2}$

(1.9) $a_n = \left(\dfrac{4n^2+1}{3n^3+2}\right)^3$ (1.10) $a_n = \left(\dfrac{8n^3-5n^2+2n+12}{3n^4+2n+1}\right)^5$

(1.11) $a_n = \dfrac{6n^3+4n^2-2n+1}{7n^2+n+4}$ (1.12) $a_n = \dfrac{n^3+n^2+2}{5n^2+3n+5}$

(1.13) $a_n = \dfrac{n^4-2n^2+4n+9}{8n^2-3n+1}$ (1.14) $a_n = \left(\dfrac{2n^5+n^3-2n+1}{4n^4+3n^2-6}\right)^4$

(1.15) $a_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ (1.16) $a_n = \dfrac{n^2+2n-3}{1+2+\ldots+n}$

(1.17) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+2}}{3n+1}$ (1.18) $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+7n+2}+7n}{4n+3}$

(1.19) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+3}+2n}{n+7}$ (1.20) $a_n = \dfrac{4n+2}{n+\sqrt{9n^2+4}}$

(1.21) $a_n = \sqrt{n^2+3}-n$ (1.22) $a_n = \sqrt{n^2+3}+n$

(1.23) $a_n = \sqrt{9n^2-7}-3n$ (1.24) $a_n = \sqrt{4n^2+2}-2n$

(1.25) $a_n = \sqrt{n^2+7n}-n$ (1.26) $a_n = \sqrt{4n^2+5n}-2n$

(1.27) $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+9}-n}$ (1.28) $a_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n^2+4}-\sqrt{2}n}$

(1.29) $a_n = \sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2}n$ (1.30) $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{9n^2+3n}-3n}$

(1.31) $a_n = \dfrac{2^n+4^n}{3\cdot 2^n+3\cdot 4^n}$ (1.32) $a_n = \dfrac{3^n+5^n}{2^n+9\cdot 3^n-2\cdot 4^n-5^n}$

(1.33) $a_n = \dfrac{5\cdot 3^n+9^n}{2^n+4\cdot 3^{2n}}$ (1.34) $a_n = \dfrac{2^n-2^{2n}+2^{3n}}{2^n+3\cdot 2^{2n}-7\cdot 2^{3n}}$

2. Obliczyć granice ciągów:

(2.1) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

(2.2) $a_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n}$

(2.3) $a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}$

(2.4) $a_n = \sqrt[n]{9 \cdot 7^n + 7 \cdot 8^n}$

(2.5) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 9^n}$

(2.6) $a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 7^n + 8^n + 3 \cdot 11^n}$

(2.7) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

(2.8) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(2.9) $a_n = \sqrt[n]{7n}$

(2.10) $a_n = \sqrt[n]{23n}$

(2.11) $a_n = \sqrt[n]{5n + 3}$

(2.12) $a_n = \sqrt[n]{7n + 9}$

(2.13) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

(2.14) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

(2.15) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{5n+4}$

(2.16) $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n-2}$

(2.17) $a_n = \left(\frac{n-4}{n}\right)^{3n+1}$

(2.18) $a_n = \left(\frac{n-7}{n}\right)^{2n-3}$

(2.19) $a_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$

(2.20) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2+1}$

(2.21) $a_n = \left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{4n+3}$

(2.22) $a_n = \left(\frac{3n+5}{3n}\right)^{3n+2}$

(2.23) $a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)^{4n+7}$

(2.24) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n-4}$

(2.25) $a_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^{\frac{7n^2+1}{3n+1}}$

(2.26) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n^2+n-1}{n+1}}$

3) Obliczyć granice funkcji

(3.1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 2x}$

(3.2) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x}{2x^3 - x}$

(3.3) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

(3.4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(3.5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(3.6) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

(3.7) $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

(3.8) $\lim_{x\to 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$

(3.9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

(3.10) $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sqrt{x+4} - 2}$

(3.11) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$

(3.12) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+14} - 4}{x - 2}$

4) Obliczyć granice jednostronne

$$(4.1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \qquad (4.2)\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

$$(4.3)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x-1} \qquad (4.4)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1}$$

$$(4.5)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{2-x} \qquad (4.6)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{2-x}$$

$$(4.7)\ \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{(x-3)^2} \qquad (4.8)\ \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{(x-3}$$

5) Zbadać ciągłość funkcji

$$(5.1)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x+5} & \text{dla} \quad x \neq -5 \\ -10 & \text{dla} \quad x = -5. \end{cases}$$

$$(5.2)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{dla} \quad x = 2. \end{cases}$$

$$(5.3)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} & \text{dla} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{dla} \quad x = -1 \end{cases}$$

$$(5.4)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$(5.5)\quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$(5.6)\quad f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{dla} \quad x \geq -1 \\ x^2+5x+1 & \text{dla} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$(5.7)\quad f(x) = \begin{cases} 2x^2+x-1 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 3x-1 & \text{dla} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$(5.8)\quad f(x) = \begin{cases} 5x & \text{dla} \quad x < 0 \\ \sin x & \text{dla} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(5.9) $f(x) = \begin{cases} 8x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \leq 1 \\ 9x - 2 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

6) Wyznaczyć równania asymptot funkcji

(6.1) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ (6.2) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-1}$

(6.3) $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$ (6.4) $f(x) = \dfrac{5+2x}{x+1}$

(6.5) $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$ (6.6) $f(x) = \dfrac{-4}{x-1}$

(6.7) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+4}$ (6.8) $f(x) = \dfrac{-2x^2-2x}{x^2+1}$

(6.9) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-2}{x+2}$ (6.10) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

(6.11) $f(x) = \dfrac{3x^3+x^2-2}{x^2+2}$ (6.12) $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+1}$

Przykładowy test

1. Liczba 2 jest granicą ciągu

A) $a_n = \dfrac{4n^2+3n+2}{2n^3+2n+1}$,

B) $b_n = \dfrac{5-3n+6n^2}{1+2n+3n^2}$,

C) $c_n = \dfrac{8n^2-3n+2}{4n^3+7n-2}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

2. Która granica została poprawnie obliczona?

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-4^n}{2^n+3^n+4^n} = 1$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 4^n+2\cdot 5^n}{4\cdot 2^n-7\cdot 3^n+8\cdot 5^n} = \dfrac{1}{4}$,

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-2^{2n}+2^{3n}}{2^n+3\cdot 2^{2n}-7\cdot 2^{3n}} = -\dfrac{1}{7}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

3. Kt ora z relacji jest prawdziwa?

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n-\sqrt{4n^2+9}\right) < \dfrac{1}{20}$,

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} = 5$,

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n+7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4^n+4\cdot 7^n}{3^n+7^n} + 4$

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

4. Który z ciągów jest zbieżny do e^2?

A) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$,

B) $b_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n+3}$

C) $c_n = \left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{2n-1}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

5. Która z granic została poprawnie obliczona?

A) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2-16} = \dfrac{1}{8}$,

B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+2x^2+4x}{3x^2+2x} = 0$,

C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \dfrac{1}{6}$.

A) TAK | NIE B) TAK | NIE C) TAK | NIE

6. Funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$

A) nie ma granicy w punkcie $x = 0$,

B) jest ciągła w punkcie $x = 0$,

C) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$.

A) TAK | NIE B) TAK | NIE C) TAK | NIE

7. Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{dla} \quad x \geq 1 \\ -2x+4 & \text{dla} \quad x < 1 \end{cases}$

A) jest ciągła w punkcie $x = 1$,

B) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$,

C) nie ma granicy w punkcie $x = 1$.

A) TAK | NIE B) TAK | NIE C) TAK | NIE

8. Które ze zdań jest prawdziwe?

A) prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$,

B) prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{3x^2+1}$,

C) prosta $y = 2x-1$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$.

A) TAK | NIE B) TAK | NIE C) TAK | NIE

Odpowiedzi

1. A) nie, B) tak, C) nie,
2. A) nie, B) tak, C) tak,
3. A) tak, B) tak, C) tak,
4. A) tak, B) nie, C) nie,
5. A) tak, B) nie, C) tak,
6. A) nie, B) tak, C) tak,
7. A) nie, B) nie, C) tak,
8. A) nie, B) tak, C) tak.

Rozdział 2

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Zadanie1. Obliczyć pochodną funkcji:

a) $f(x) = 7x^5 - 4x^4 + x^3 - 9x^2 + 3x - 7 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}$,

b) $f(x) = (x^2 + x + 3)\sin x$,

c) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 7}{8x^2 + 3x + 1}$,

d) $f(x) = \sqrt{\ln x}$,

e) $f(x) = \tan^2(3x + 1)$.

Rozwiązanie.

a) Przedstawmy najpierw funkcję f w postaci:

$f(x) = 7x^5 - 4x^4 + x^3 - 9x^2 + 3x - 7 + 2x^{-1} + 5x^{-2} - 3x^{-3}$. Wówczas

$f'(x) = 7 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 4x^3 + 3x^2 - 9 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 7 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 5 \cdot ($

$x^{-3} - 3 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = 35x^4 - 16x^3 + 3x^2 - 18x + 3 - \frac{2}{x^2} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$.

b) Stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$f'(x) = (x^2+x+3)' \cdot \sin x + (x^2+x+3) \cdot (\sin x)' = (2x+1)\sin x + (x^2+x+3)$

c) Stosujemy wzór na pochodną ilorazu:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x - 7)' \cdot (8x^2 + 3x + 1) - (3x^2 + 2x - 7) \cdot (8x^2 + 3x +}{(8x^2 + 3x + 1)^2}$$

$$\frac{(6x + 2) \cdot (8x^2 + 3x + 1) - (3x^2 + 2x - 7) \cdot (16x + 3)}{(8x^2 + 3x + 1)^2} = \frac{-7x^2 + 118x -}{(8x^2 + 3x +}$$

d) Stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

e) Postępujemy analogicznie, jak w poprzednim przykładzie:

$f'(x) = 2\tan(3x + 1) \cdot (\tan(3x + 1))' =$

$$= 2\tan(3x+1) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x+1)} \cdot (3x+1)' = 2\tan(3x+1) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x+1)} \cdot 3 =$$
$$= \frac{6\tan(3x+1)}{\cos^2(3x+1)}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + x + 3$ w punkcie $x_0 = 1$.

Rozwiązanie.

Równaniem stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Wobec tego obliczamy $f(x_0) = f(1) = 5$ oraz $f'(x) = 3x^2 + 1$ i $f'(x_0) = f'(1) = 4$. Równaniem stycznej jest więc $y - 5 = 4(x - 1)$, czyli $y = 4x + 1$.

Zadanie 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 6$,

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4}$,

c) $f(x) = x - 2\ln x$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$. Obliczamy pochodną funkcji f:

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, i rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0$:

$6x^2 + 6x - 36 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) > 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.

Oczywiście, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$.

Wobec tego, funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty, -3)$ i w przedziale $(2, \infty)$, oraz maleje w przedziale $(-3, 2)$.

W punktach $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$ jest spełniony warunek konieczny i warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego. Dokładniej, w punkcie $x = -3$ funkcja f osiąga maksimum lokalne równe $f(-3) = 87$, zaś w punkcie $x = 2$ funkcja osiąga minimum lokalne równe $f(2) = -38$.

b) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$. Podobnie, jak poprzednio, rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0$:

$$\frac{-2x^2+10x-8}{(x^2-4)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in (1,2) \cup (2,4),$$

więc funkcja f rośnie w przedziale $(1, 2)$ i w przedziale $(2, 4)$.
Analogicznie, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (4, \infty)$, więc funkcja f maleje w przedziale $(-\infty, -2)$, w przedziale $(-2, 1)$ oraz w przedziale $(4, \infty)$.
W punkcie $x = 1$ funkcja osiąga minimum równe $f(1) = 1$, zaś w punkcie $x = 4$ - maksimum równe $f(4) = \frac{1}{4}$.

c) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$. Rozwiązujemy nierówność $f'(x) > 0$:
$1 - \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow (x-2)x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup ((2, \infty)$.
Po uwzględnieniu dziedziny, tzn. $x > 0$, otrzymujemy ostatecznie:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$$

więc funkcja f rośnie w przedziale $(2, \infty)$. Analogicznie, pochodna funkcji f jest ujemna w przedziale $(0, 2)$, więc funkcja f jest malejąca w tym przedziale. W punkcie $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne równe $f(2) = 2 - \ln 2$.

Zadanie 4. Wyznaczyć wartości największą i najmniejszą funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 1$ w przedziale $[0, 2]$.

Rozwiązanie

Najpierw znajdujemy punkty krytyczne funkcji f, tzn. miejsca zerowe jej pochodnej należące do wnętrza podanego przedziału. W tym celu rozwiązujemy równanie

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ lub } x = -1.$$

Zauważmy, że tylko $x = 1$ należy do podanego przedziału. Następnie obliczamy wartości funkcji f w otrzymanym punkcie i na końcach przedziału, tzn. $f(1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Największą z tych liczb jest 3, najmniejszą jest -1. Są to więc odpowiednio wartości największa i najmniejsza funkcji f w przedziale $[0, 2]$.

Zadanie 5. Obliczyć granice za pomocą reguły de L'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{14} - 1}{x^8 - 1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{e^x}$.

Rozwiązanie

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x^2 + x - 6)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x - 3}{2x + 1} = \frac{1}{5}.$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^{14} - 1}{x^8 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^{14} - 1)'}{(x^8 - 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{14x^{13}}{8x^7} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{1}{e},$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

e) Stosujemy regułę de L'Hospitala dwukrotnie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

ZADANIA

1) Obliczyć pochodną funkcji

(1.1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ (1.2) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 6x$

(1.3) $f(x) = 4x^6 - 5x^3 + \sin x - \ln x$ (1.4) $f(x) = 3x^5 + \tan x + 4e^x$

(1.5) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3x^2 + 7x - 2$ (1.6) $f(x) = -2\cos x + 3\sqrt{x} - 1$

(1.7) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ (1.8) $f(x) = \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^5} + \sqrt{x}$

(1.9) $f(x) = x \cdot \sin x$ (1.10) $f(x) = (5x^2 + 3x + 1)\tan x$

(1.11) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ (1.12) $f(x) = x^2 \sin x + 3x \cos x$

(1.13) $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 5x + 1)e^x$ (1.14) $f(x) = (-2x^2 + 4x - 3)\cos$

(1.15) $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$ (1.16) $f(x) = \frac{3x-2}{2x+7}$

(1.17) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 2}{7x+1}$ (1.18) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1}$

(1.19) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (1.20) $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$

(1.21) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{4x}$ (1.22) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

2) Obliczyć pochodną funkcji

(2.1) $f(x) = (3x+1)^5$ (2.2) $f(x) = (-5x+4)^7$

(2.3) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x + 3)^8$ (2.4) $f(x) = (9x^2 - 3x + 1)^6$

(2.5) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ (2.6) $f(x) = \sqrt{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}$

(2.7) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ (2.8) $f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x}$

(2.9) $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$ (2.10) $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 11)$

(2.11) $f(x) = \sin 3x$ (2.12) $f(x) = 3\cos 2x$

(2.13) $f(x) = \sin^2 x$ (2.14) $f(x) = \tan^3 x$

(2.15) $f(x) = \sin(x^2)$ (2.16) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

(2.17) $f(x) = \ln(\sin 2x)$ (2.18) $f(x) = 3\sqrt{\sin 7x} + 2$

(2.19) $f(x) = \cos^3 2x$ (2.20) $f(x) = \tan^3 2x$

(2.21) $f(x) = e^{3x+1}$ (2.22) $f(x) = e^{3x^2+4x-2}$

(2.23) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + x + 2)}$ (2.24) $f(x) = \ln(\sin 3x)$

3) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji / w punkcie X Q , gdy

(3.1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$

(3.2) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = -2$,

(3.3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$, $x_0 = 3$

(3.4) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$

(3.5) $f(x) = 2x + \ln x$, $x_0 = 1$

(3.6) $f(x) = 3e^x + x - 2$, $x_0 = 0$.

4) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f

(4.1) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 1$ (4.2) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$

(4.3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ (4.4) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x +$

(4.5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ (4.6) $f(x) = x^5 - 5x + 1$

(4.7) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$ (4.8) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(4.9) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ (4.10) $f(x) = \dfrac{x^2+16}{x-3}$

(4.11) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ (4.12) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

(4.13) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (4.14) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x^2+4}$

(4.15) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ (4.16) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

(4.17) $f(x) = e^x(x^2+2)$ (4.18) $f(x) = e^x(3x^2+5)$

(4.19) $f(x) = x - e^x$ (4.20) $f(x) = x + 2 - e^{x+1}$

5) Znaleźć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale:

(5.1) $f(x) = x^3 - 3x,\ x \in [0,2]$

(5.2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x,\ x \in [-2,1]$

(5.3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1,\ x \in [0,2]$

(5.4) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 2,\ x \in [-1,1]$

(5.5) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x \in [0,3]$.

6) Obliczyć granice za pomocą reguły de L'Hospitala

(6.1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ (6.2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-7x+5}{x^2-9x+8}$

(6.3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-2x^2+1}$ (6.4) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2+9}{x^3-27}$

(6.5) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^5-1}$ (6.6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{11}+x^{10}-x^6-x^4}{x^3+4x^2-5}$

(6.7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (6.8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$

(6.9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\ln(2x+1)}$ (6.10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{5x}$

(6.11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (6.12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

(6.13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x}$ (6.14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{2\sin 5x}$

(6.15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (6.16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{4\sin 5x}$

(6.17) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{4x}$ (6.18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 3x}$

(6.19) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (6.20) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

(6.21) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x}$ (6.22) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x+1}{e^x+2}$

(6.23) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+3x+1}{e^x}$ (6.24) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{4x^2+e^x}{x^2+2e^x}$

(6.25) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$ (6.26) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln 3x}{x^2}$

Przykładowy test

1. Która z pochodnych została poprawnie obliczona?

A) $\left(x^2 \sin x\right)' = 2x \cos x$,

B) $\left(\dfrac{3x+1}{2x+1}\right)' = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$,

C) $\left(\sqrt{\cos x}\right)' = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

2. Jeśli $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x \sin x$, to

A) $f'(0) = g'(0)$,

B) $f'(\pi) + g'(\pi) = 0$,

C) $f'(\pi) = g'(2\pi)$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

3. Prosta $y = 3x - 2$ jest styczna w punkcie $x_0 = 1$ do wykresu funkcji

A) $f(x) = x^2 + x - 1$,

B) $f(x) = x^3 + 1$,

C) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

4. Funkcja $f(x) = x^3 - 3x + 3$

A) rośnie w przedziale $(1, \infty)$,

B) maleje w przedziale $(-\infty, -1)$,

C) osiąga w punkcie $x = 1$ maksimum lokalne.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

5. Funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$

A) rośnie w przedziale $(2, \infty)$,

B) maleje w przedziale $(-4, 2)$,

C) osiąga w punkcie $x = -4$ maksimum lokalne.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

6. Jeśli $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ i $x \in [0, 1]$, to

A) wartością największą funkcji f jest 1,

B) wartością najmniejszą funkcji f jest -1,

C) wartością najmniejszą funkcji f jest -3.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

7. Która z granic została poprawnie obliczona?

A) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = 0$,

B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin 3x}{\sin 5x} = \dfrac{6}{5}$,

C) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + 1}{x + 1} = \infty$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

8. Która z granic została poprawnie obliczona?

A) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{12} - 1}{x^4 - 1} = 3$,

B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = 0$,

C) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

Odpowiedzi

1. A) nie, B) tak, C) tak,
2. A) tak, B) nie, C) tak,
3. A) tak, B) nie, C) tak,
4. A) tak, B) nie, C) nie,
5. A) tak, B) nie, C) tak,
6. A) tak, B) tak, C) nie,
7. A) nie, B) tak, C) tak,
8. A) tak, B) nie, C) nie.

Przykładowe kolokwium 1

1) Liczba 2 jest granicą ciągu

A) $a_n = \dfrac{6n^3 - n^2 + 1}{3n^2 + 4n - 1}$,

B) $b_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$,

C) $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

2) Prawdziwe jest zdanie

A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x}{\sin x} = 6$,

B) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = 1$,

C) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \dfrac{1}{4}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

3) Funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} & dla \quad x \neq -1 \\ 0 & dla \quad x = -1 \end{cases}$

A) jest ciągła w punkcie $x = -1$,

B) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$,

C) nie ma granicy w punkcie $x = -1$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

4) Prawdziwe jest zdanie

A) $\left(x^3 \tan x\right)' = x^2 \left(3\tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$,

B) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1} = 1$,

C) $y = 2x + 2$ jest równaniem asymptoty ukośnej funkcji $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

5) Jeśli $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 20}{x - 3}$, to funkcja f

A) rośnie w przedziale $(4, \infty)$,

B) maleje w przedziale (2,4),

C) osiąga w punkcie $x = 4$ maksimum lokalne.

A) |TAK| | NIE | B) |TAK| | NIE

Odpowiedzi

1. A) nie, B) tak, C) tak,
2. A) tak, B) nie, C) tak,
3. A) tak, B) tak, C) nie,
4. A) tak, B) tak, C) nie,
5. A) tak, B) nie, C) nie.

Przykładowe kolokwium 2

1) Liczba 1 jest granicą ciągu

A) $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^3+2n+1}$,

B) $b_n = \sqrt[n]{10^n+1}$,

C) $c_n = \dfrac{5^{2n}+5^n}{25^n+3}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

2) Prawdziwe jest zdanie

A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2\sin 3x} = \dfrac{5}{6}$,

B) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = \dfrac{4}{3}$,

C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = 0$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

3) Funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & dla \quad x \neq 1 \\ 3 & dla \quad x = 1 \end{cases}$

A) jest ciągła w punkcie $x = 1$,

B) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$,

C) nie ma granicy w punkcie $x = 1$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

4) Prawdziwe jest zdanie

A) $\left(\ln^2(3x+1)\right)' = \dfrac{2\ln(3x+1)}{3x+1}$,

B) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{e^x} = \dfrac{1}{3}$,

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{2n} = e^{10}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

5) Jeśli $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 6$, to funkcja f

A) maleje w przedziale $(-2, 3)$,

B) rośnie w przedziale $(-\infty, -3)$,

C) osiąga w punkcie $x = 2$ minimum lokalne.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

Odpowiedzi

1. A) nie, B) nie, C) tak,
2. A) tak, B) tak, C) nie,
3. A) tak, B) tak, C) nie,
4. A) nie, B) nie, C) tak,
5. A) nie, B) tak, C) tak.

Przykładowe kolokwium 3

1) Liczba 0 jest granicą ciągu

A) $a_n = \dfrac{n+4}{7n^2+3n-1}$,

B) $b_n = \dfrac{2^{n+3}+3^n}{3^n+4^n}$,

C) $c_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right)^{5n+1}$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

2) Prawdziwe jest zdanie

A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3\sin 2x} = \dfrac{2}{3}$,

B) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = 1$,

C) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} > 5$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

3) Funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & dla \quad x \le -1 \\ x^2-3x-6 & dla \quad x > -1 \end{cases}$

A) jest ciągła w punkcie $x=-1$,

B) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$,

C) nie ma granicy w punkcie $x=-1$.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

4) Prawdziwe jest zdanie

A) $\left(\sqrt{\sin(5x+1)}\right)' = \dfrac{\cos(5x+1)}{2\sqrt{\sin(5x+1)}}$,

B) 1 jest wartością największą funkcji $f(x) = 2x^3-6x+1$ w przedziale $[0,1]$,

C) wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x+2}$ nie ma asymptoty poziomej.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

5) Funkcja $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$

A) rośnie w przedziale $(2, \infty)$,

B) maleje w przedziale $(0, 2)$,

C) osiąga w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne.

A) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}$ $\boxed{\text{NIE}}$

Odpowiedzi

1. A) tak, B) tak, C) nie,
2. A) tak, B) nie, C) nie,
3. A) nie, B) nie, C) tak,
4. A) nie, B) tak, C) nie,
5. A) tak, B) nie, C) nie.

Przykładowe kolokwium 4

1) Która z granic została poprawnie obliczona?

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2-n+1}{2n^3+n+1} = \frac{1}{2}$,

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+6^n+7^n} = 5$,

C) $c_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = e^2$.

A) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$

2) Która z pochodnych została poprawnie obliczona?

A) $\left(x^2 \ln x\right)' = 2x \ln x + x$,

B) $\left(\frac{x^2+3x-1}{\sin x}\right)' = \frac{2x+3}{\cos x}$,

C) $\left[\ln\left(x^2+2x+2\right)\right]' = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

A) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$

3) Funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}+1 & dla \quad x \le 1 \\ x^2+2 & dla \quad x > 1 \end{cases}$

A) jest ciągła w punkcie $x = 1$,

B) jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbf{R}$,

C) nie ma granicy w punkcie $x = 1$.

A) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$

4) Prawdziwe jest zdanie

A) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} > 2$,

B) $y = x + 3$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$,

C) wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$ nie ma asymptoty pionowej.

A) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ B) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$ C) $\boxed{\text{TAK}}\ \boxed{\text{NIE}}$

5) Funkcja $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

A) rośnie w przedziale $(2, \infty)$,

B) maleje w przedziale $(-\infty, 1)$,

C) osiąga w punkcie $x = 2$ minimum lokalne.

A) <u>TAK</u> NIE

B) <u>JAK 1 NIE</u>

Odpowiedzi

1. A) tak, B) nie, C) nie,
2. A) tak, B) nie, C) tak,
3. A) tak, B) tak, C) nie,
4. A) tak, B) nie, C) tak,
5. A) tak, B) nie, C) tak.

Rozdział 3

RACHUNEK CAŁKOWY

Zadanie1. Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int \left(x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1\right) dx,$

b) $\int (3e^x - \sin x + 2\cos x)\, dx,$

c) $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3} dx,$

d) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

Rozwiązanie.

a) $\int \left(x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1\right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + C.$

b) $\int (3e^x - \sin x + 2\cos x)\, dx = 3e^x + \cos x + 2\sin x + C.$

c) $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} + 3\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(x^{-1} + 3x^{-2} + x^{-3}\right) dx =$

$= \ln|x| + 3\frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = \ln|x| - 3x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + C =$

$= \ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

d) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C =$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{x^1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^0}{x^{\frac{1}{2}}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

Zadanie 2. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\int_0^1 x^3 dx$,

b) $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Rozwiązanie.

a) $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}0^4 = \frac{1}{4}$.

b) $\int_1^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^4 \left(2x + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left[x^2 + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$
$= 4^2 + 2\sqrt{4} - 1^2 - 2\sqrt{1} = 17$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

Zadanie 3. Wyznaczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 1$ a osią OX jeśli $x \in [0, 1]$.

Rozwiązanie.

Miara pola pod wykresem funkcji jest równa całce
$\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 + 1 - \frac{1}{3}0^3 - 0 = \frac{4}{3}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ a osią OX jeśli $x \in [1, 3]$.

Rozwiązanie.

Pole obszaru pod wykresem funkcji jest równe całce
$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

Zadanie 5. Wyznaczyć pole obszaru zawartego między wykresami funkcji

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$,

b) $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x^2$,

c) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = -2x + 5$.

Rozwiązanie.

a) Po pierwsze należy wskazać punkty w których wykresy podanych funkcji się przecinają. W tym celu rozwiązujemy równanie $f(x) = g(x)$, tzn.

$x^2 = 2x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ lub $x = 2$.

W przedziale $[0, 2]$ prosta $y = 2x$ znajduje się powyżej krzywej $y = x^2$, zatem pole obszaru zawartego między wykresami funkcji wyraża się całką:

$$\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Jak wyżej, zaczynamy od znalezienia punktów wspólnych obu wykresów, tzn. rozwiązujemy równanie $f(x) = g(x)$:

$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = -1$.

W przedziale $[-1, 1]$ krzywa $y = 2 - x^2$ znajduje się powyżej krzywej $y = x^2$ a zatem pole obszaru zawartego między wykresami funkcji wyraża się całką:

$$\int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^2\right) dx = \int_{-1}^1 \left(2 - 2x^2\right) dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^1 =$$

$$= 2 - \frac{2}{3} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

c) Zaczynamy od rozwiązania równania $f(x) = g(x)$:

$\frac{2}{x} = -2x + 5 \Leftrightarrow 2 = -2x^2 + 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ lub $x = \frac{1}{2}$.

W przedziale $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ prosta $y = -2x + 5$ znajduje się powyżej krzywej $y = \frac{2}{x}$, więc pole zawarte między wykresami wyraża się całką:

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(-2x + 5 - \frac{2}{x}\right) dx = \left[-x^2 + 5x - 2\ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^2 =$$

$$= -4 + 10 - 2\ln 2 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 2\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} - 4\ln 2.$$

ZADANIA

1) Obliczyć całki nieoznaczone:

(1.1) $\int (2x+1)dx$ (1.2) $\int (-5x+3)dx$

(1.3) $\int (x^2+x+1)dx$ (1.4) $\int (3x^2-7x+3)dx$

(1.5) $\int (5x^7-3x^4+9x^2-3x+11)dx$ (1.6) $\int (-x^5+4x^3-3x^2+x-2)dx$

(1.7) $\int \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$ (1.8) $\int \left(\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right)dx$

(1.9) $\int \frac{x^2-3x+5}{x^2}dx$ (1.10) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3}dx$

(1.11) $\int \frac{(2x+1)(x^2+7)}{x^3}dx$ (1.12) $\int \frac{(2x^2+1)(x^2+7)}{x^4}dx$

(1.13) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (1.14) $\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})dx$

(1.15) $\int (3\sin x+2\cos x-3e^x)\,dx$ (1.16) $\int \left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

2) Obliczyć całki oznaczone:

(2.1) $\int_1^2 (4x+3)dx$ (2.2) $\int_0^2 (-3x+1)dx$

(2.3) $\int_0^1 (x^2+1)dx$ (2.4) $\int_0^2 (3x^2+4x+1)dx$

(2.5) $\int_{-1}^1 x^3dx$ (2.6) $\int_{-1}^1 (2x^3+x+2)dx$

(2.7) $\int_0^1 (10x^4-6x^2+2)dx$ (2.8) $\int_0^2 (-5x^4+9x^2+1)dx$

(2.9); $\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}dx$ (2.10); $\int_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}dx$

(2.11) $\int_0^1 (\sqrt{x}+e^x)dx$ (2.12) $\int_0^\pi \sin x dx$

3) Wyznaczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $y=f(x)$ a osią OX dla funkcji

(3.1) $f(x)=2x+1$, $x\in[1,2]$,

(3.2) $f(x)=x^2$, $x\in[-1,1]$,

(3.3) $f(x)=x^2+x+1$, $x\in[0,2]$,

(3.4) $f(x)=x^2-x+2$, $x\in[1,3]$,

(3.5) $f(x)=x^3+1$, $x\in[0,1]$,

(3.6) $f(x) = x^3 + 2x,\ x \in [1, 2]$,

(3.7) $f(x) = e^x,\ x \in [0, 1]$,

(3.8) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1,\ x \in [1, 2]$.

4) Znaleźć pola figur ograniczonych przez krzywe o równaniach:

(4.1) $y = x^2,\ y = x$,

(4.2) $y = 6x^2,\ y = 12x$,

(4.3) $y = x^2 + 1,\ y = 2x + 1$,

(4.4) $y = -x^2,\ y = 2x - 3$,

(4.5) $y = x^2 - 3,\ y = -x^2 + 5$,

(4.6) $y = x^2 + 2,\ y = -x^2 - 2x + 2$,

(4.7) $y = x^2 - 6x + 10,\ y = 6 - x^2$,

(4.8) $y = x^2 + x + 1,\ y = -x^2 + 3x + 5$,

(4.9) $y = \dfrac{3}{x},\ y = -3x + 10$.

ALGEBRA LINIOWA

Zadanie 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Wykonać (jeśli to możliwe) działania:

a) $B + C^T$,

b) $3C - B^T$,

c) $A \cdot B$,

d) $B \cdot A$,

e) A^3.

Rozwiązanie.

a) $B + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $3C - B^T = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

d) Działanie $B \cdot A$ jest niewykonalne, bo ilość kolumn macierzy B nie jest równa ilości wierszy macierzy A.

e) $A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$

Zadanie 2. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0.$

c) Stosujemy metodę Sarrusa:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right. =$$

$= -2 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \cdot 0) =$
$-8 + 12 - 2 - 6 = -4.$

d) $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right. = 0 + 12 + 0 - (3 + 2 + 0) = 12 - 5 = 7.$

Zadanie 3. Obliczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Jeśli macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, tzn.

$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, to $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. W naszym przypadku

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$, więc

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Nasze równanie możemy więc napisać w postaci $A \cdot X \cdot B = C$

Zauważmy, że $\det(A) = -1 \neq 0$ i $\det(B) = -2 \neq 0$, więc istnieją macierz A^{-1} i B^{-1}. Rozwiązanie równania przebiega następująco:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B &= C & /\cdot A^{-1} \text{ lewostronnie} \\ A^{-1} \cdot X \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot X \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ X \cdot B &= A^{-1} \cdot C & /\cdot B^{-1} \text{ prawostronnie} \\ X \cdot B \cdot B^{-1} &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \\ X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Macierze odwrotne do A i B obliczamy analogicznie, jak w poprzednim zadaniu:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

•

Zadanie 5. Rozwiązać układy równań za pomocą metody eliminacji (Gaussa-Jordana):

$$\text{a)}\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \\ -3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ 3x + 2y + z - t = 2 \\ -x + y - 7z + 2t = 4 \\ 3x + 4y - 8z + 2t = 8 \end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ x + 4y + z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

a) Metoda eliminacji polega na odpowiednim przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu równań tak, aby uzyskać tzw. postać schodkową macierzy. Macierz rozszerzoną przekształcamy za pomocą operacji elementarnych na wierszach. Są to: zamiana wierszy, pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera, oraz dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę. Każda z tych operacji prowadzi do układu równoważnego z wyjściowym, tzn. posiadającego ten sam zbiór rozwiązań. W niniejszym przykładzie dokonujemy następujących przekształceń:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 + 3w_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + 2w_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Zapisujemy układ równań odpowiadający ostatniej postaci macierzy rozszerzonej:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \quad\; - y - 3z = -8 \\ \qquad\quad\; - z = -3 \end{cases}$$

Z ostatniego równania wynika, że $z = 3$. Po podstawieniu tego wyniku do drugiego równania otrzymujemy y — —1. Wstawiamy obie liczby do pierwszego równania, skąd wynika, że x — 2. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań jest $\begin{cases} X = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -7 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 + w_1 \\ w_4 - 3w_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -9 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + 2w_2 \\ w_4 + w_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_4 - w_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatnie równanie układu przyjmuje postać $0 = 1$, więc układ jest sprzeczny.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 + w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zapiszmy układ równań odpowiadający ostatniej postaci macierzy rozszerzonej:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Powyższy układ rozwiązujemy parametryzując tę niewiadomą, której nie ma na głównej przekątnej, w tym przypadku jest to zmienna z. Przyjmujemy $z = t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$ i przenosimy parametr t w każdym równaniu na stronę wyrazów wolnych. Układ równań przyjmuje następującą postać:

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \\ \quad 3y = 3 - 2t \end{cases}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $y = 1 - \frac{2}{3}t$. Wstawiamy uzyskaną wartość do pierwszego równania i po przekształceniach otrzymujemy $x = \frac{5}{3}t$.

Ostatecznie rozwiązaniem układu równań jest $\begin{cases} x = \frac{5}{3}t \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \\ z = t \in \mathbf{R} \end{cases}$

tzn. układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań parametryzowanych przez dowolną rzeczywistą wartość parametru t.

ZADANIA

1) Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wykonać (jeśli to możliwe) działania:
(1.1) $A + 2B$, (1.2) $A - B^T$, (1.3) $A + C$, (1.4) $A \cdot B$, (1.5) $B \cdot A$,
(1.6) $A \cdot C$, (1.7) $A \cdot C^t$, (1.8) $C \cdot D$, (1.9) $D \cdot C$, (1.10) $D \cdot C^t$,
(1.11) $(A - B) \cdot C$, (1.12) $A^2 \cdot B$, (1.13) $A \cdot B \cdot C$, (1.14) $D^2 \cdot C^t$.

2) Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wykonać (jeśli to możliwe) działania:
(2.1) $3A + B$, (2.2) $2A + B^T$, (2.3) $A - C^t$, (2.4) $A \cdot B$, (2.5) $B \cdot A$,
(2.6) $A \cdot C$, (2.7) $A \cdot C^t$, (2.8) $C \cdot D$, (2.9) $D \cdot C$, (2.10) $D \cdot C^t$,
(2.11) $(A - B) \cdot C^t$, (2.12) $D \cdot E$, (2.13) E^3, (2.14) $E^t \cdot C$.

3) Obliczyć wyznaczniki:

$$(3.1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad (3.2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, \quad (3.3) \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \quad (3.4) \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix},$$

(3.5) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, (3.6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, (3.7) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$,

(3.8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, (3.9) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, (3.10) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$,

(3.11) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$, (3.12) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, (3.13) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

(3.14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, (3.15) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, (3.16) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

(3.17) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, (3.18) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, (3.19) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4) Obliczyć macierz odwrotną do macierzy

(4.1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (4.2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (4.3) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (4.4) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(4.5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (4.6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5) Rozwiązać równania macierzowe:

(5.1) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

(5.2) $$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.3) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(5.4) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(5.5) $$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

(5.6) $$X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.7) $$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.8) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(5.9) $$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

(5.10) $$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

6) Rozwiązać układy równań liniowych stosując metodę eliminacji Gaussa.

$$(6.1)\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}, \quad (6.2)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ -x + y + z = 0 \end{cases},$$

$$(6.3)\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 4y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 3z = 9 \end{cases}, \quad (6.4)\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ -2x - 5y + 3z = 1 \\ -x - 5y - z = 1 \end{cases},$$

$$(6.5)\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ -x - 2y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ -2x + y + 2z - t = -2 \end{cases},$$

$$(6.6)\begin{cases} x - y + z - 2t = 2 \\ -x + 2y - z + 3t = -5 \\ -2x + 4y + 2z - t = -6 \\ x + y + z - 4t = -4 \end{cases},$$

$$(6.7)\begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ 2x + 3y + z + 2t = 7 \\ -2x - 3y - 3z + t = -6 \\ x - y - 2z + t = 1 \\ 3x + 5y + t = 7 \end{cases},$$

$$(6.8)\begin{cases} -x + y - z - 4t = 1 \\ 4x - 3y + 2z + 3t = -15 \\ 3x - 2y + 2z + t = -12 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - 3t = -11 \end{cases}$$

$$(6.9)\begin{cases} -x - y + z - t = 1 \\ x + 2y - z + t = -2 \\ 3x + 2y - z + t = 2 \\ 2x - y + z - 2t = 6 \\ 5x + y - t = 8 \end{cases},$$

$$(6.10)\begin{cases} x + 2y - z + t = 5 \\ 3x - 5y + z - t = -8 \\ 2x + 4y + z - t = 1 \\ -x - y + z + 2t = -1 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases},$$

$$(6.11)\begin{cases} 2x + 3y - z + t = -2 \\ x + y + z + t = 0 \\ 3x + 4y + 2z - t = 3 \\ 5x + 4y - z + t = -2 \\ 3x + 4y + 2t = -2 \end{cases},$$

$$(6.12)\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x + y - z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + z - t = 4 \\ -x + 2y - 3z + t = -2 \\ 5x - 2z + t = 7 \end{cases},$$

$$(6.13)\begin{cases} 2x + 3y - 5z + u - v = 0 \\ x + 2y + 3z + 2u + 2v = 3 \\ 4x + 7y + z + 5u + 3v = 1 \\ 5x + 9y + 4z + 7u + 5v = 8 \end{cases},$$

$$(6.14)\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \\ x - 7y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

$$(6.15)\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}, \quad (6.16)\begin{cases} -3x + y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases},$$

$$(6.17)\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}, \quad (6.18)\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 2 \end{cases},$$

$$(6.19)\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 1 \\ 2y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = -1 \end{cases} \quad (6.20)\begin{cases} -x + y - 3z = 6 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ x - 3y + z = 10 \\ -x - 4z = 14 \\ - y - z = 8 \end{cases}$$

$$(6.21)\begin{cases} 5x + 4y - 2z + 3u = 2 \\ 3x + 2y - 6z + 9u = 4 \\ 4x + 3y - 4z + 6u = 3 \end{cases},$$

$$(6.22)\begin{cases} x + y + z + u = 1 \\ 2x + 3y - 4z + 5u = 2 \\ 3x + 4y - 3z + 6u = 0 \end{cases},$$

$$
(6.23)\quad \begin{cases} 3x + y + 3z + u - 2v = 1 \\ 8x + 2y + 9z + 2u - 3v = 2 \\ 5x + 3y + 3z + 3u - 2v = 1 \\ 4x + 2y + 3z + 2u - v = 2 \end{cases},
$$

$$
(6.24)\quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases},
$$

$$
(6.25)\quad \begin{cases} 7x - 2y + 3z + u = 0 \\ 3x + 4y + 7z - 5u = 0 \\ 4x + 11y + 16z - 13u = 0 \\ 2x - 3y - 2z + 3u = 0 \end{cases},
$$

$$
(6.26)\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 3 \\ x - 2y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases},
$$

$$
(6.27)\quad \begin{cases} 2x - y - 3z - u + v = 1 \\ x + y + z + u + 2v = -1 \\ 5x - y - 5z - u + 4v = 1 \\ 6x - 4z + 6v = 0 \end{cases},
$$

$$
(6.28)\quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases},
$$

$$(6.29)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases},$$

$$(6.30)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases},$$

$$(6.31)\quad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 3y - z - 2t = 1 \\ 3x - y + 2z - 3t = 0 \\ x - 4y + 3z - t = 0 \end{cases},$$

$$(6.32)\quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - 2y - 3z = 8 \end{cases}.$$

Przykładowy test 1

1) Jeśli $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, to

A) $M \cdot N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$,

B) $N \cdot M$ jest niewykonalne,

C) $N \cdot M^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

2) Dane jest równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Wówczas suma elementów macierzy X jest równa

A) 6, B) -6, C) -8.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

3) Który z wyznaczników został poprawnie obliczony?

A) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1$, B) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -25$, C) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

4) Układ równań

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y - z + 2t = 3 \\ -x - y + 2z - t = -1 \\ x - 3y + z + 2t = 7 \end{cases}$$

A) nie ma rozwiązań,

B) ma rozwiązanie takie, że $x + 2y - 3z + t = 0$,

C) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

Odpowiedzi

1. A) tak, B) tak, C) nie,
2. A) nie, B) tak, C) nie,
3. A) tak, B) nie, C) tak,
4. A) nie, B) tak, C) nie.

Przykładowy test 2

1) Jeśli $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, to

A) $M \cdot N = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

B) $M^t \cdot N$ jest niewykonalne,

C) $N^t \cdot M = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

2) Dane jest równanie macierzowe

$$X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Wówczas suma elementów macierzy X jest równa

A) 6,   B) -6,   C) 4.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

3) Który z wyznaczników został poprawnie obliczony?

A) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4$,   B) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$,   C) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

4) Układ równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ -2x - 3y + z + t = 2 \\ 3x + 4y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

A) nie ma rozwiązań,

B) ma rozwiązanie takie, że $x + 2y - z + 3t = 0$,

C) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

Odpowiedzi

1. A) tak, B) tak, C) tak,
2. A) tak, B) nie, C) nie,
3. A) tak, B) tak, C) tak,
4. A) nie, B) tak, C) tak.

Przykładowy test 3

1) Jeśli $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, to

A) $M^t \cdot N$ jest niewykonalne,

B) $N \cdot M = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 8 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$,

C) $M^t \cdot N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

2) Macierzą odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ jest

A) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, C) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

3) Który z wyznaczników został poprawnie obliczony?

A) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -43$, B) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, C) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12$.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

4) Układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ -2x - 5y + 2z + t = 1 \\ x + 5z = 3 \end{cases}$$

A) nie ma rozwiązań?

B) ma rozwiązanie takie, że $x + 2y + z - t = 0$,

C) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A) ITAK] | NIE B) [TAK] 1 NIE C) [TAK| | NIE

Odpowiedzi

1. A) tak, B) nie, C) tak,

2. A) tak, B) nie, C) nie,

3. A) tak, B) tak, C) tak,

4. A) tak, B) nie, C) nie.

Przykładowy test 4

1) Jeśli $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, to

A) $P \cdot N = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$,

B) N^2 jest niewykonalne,

C) $M^t \cdot P = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

2) Dane jest równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Wówczas suma elementów macierzy X jest równa

A) -3,   B) 3,   C) 5.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

3) Który z wyznaczników został poprawnie obliczony?

A) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 9$,   B) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,   C) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 7$.

A) TAK NIE   B) TAK NIE   C) TAK NIE

4) Układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ -2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

A) nie ma rozwiązań,

B) ma rozwiązanie takie, że $x + 2y + z = 0$,

C) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

A) TAK NIE B) TAK NIE C) TAK NIE

Odpowiedzi

1. A) tak, B) tak, C) nie,
2. A) nie, B) tak, C) nie,
3. A) tak, B) tak, C) tak,
4. A) tak, B) nie, C) nie.

ODPOWIEDZI

Rozdział 1.

(1.1) $\frac{4}{3}$,

(1.2) $\frac{7}{5}$,

(1.3) $\frac{5}{3}$,

(1.4) $\frac{11}{9}$,

(1.5) 4,

(1.6) 64,

(1.7) 0,

(1.8) 0,

(1.9) 0,

(1.10) 0,

(1.11) ∞,

(1.12) ∞,

(1.13) ∞,

(1.14) ∞,

(1.15) $\frac{1}{2}$,

(1.16) 2,

(1.17) $\frac{2}{3}$,

(1.18) $\frac{5}{2}$,

(1.19) 3,

(1.20) 1,

(1.21) 0,

(1.22) ∞,

(1.23) 0,

(1.24) 0,

(1.25) $\frac{7}{2}$,

(1.26) $\frac{5}{4}$,

(1.27) ∞,

(1.28) $-\infty$,

(1.29) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$,

(1.30) 6,

(1.31) $\frac{1}{3}$,

(1.32) -1,

(1.33) $\frac{1}{4}$,

(1.34) $-\frac{1}{7}$,

(2.1) 4,

(2.2) 6,

(2.3) 3,

(2.4) 8,

(2.5) 9,

(2.6) 11,

(2.7) $\frac{1}{2}$,

(2.8) $\frac{3}{4}$,

(2.9) 1,

(2.10) 1,

(2.11) 1,

(2.12) 1,

(2.13) e^2,

(2.14) e^3,

(2.15) e^{10},

(2.16) e^{15},

(2.17) e^{-12},

(2.18) e^{-14},

(2.19) e^6,

(2.20) e,

(2.21) e^{10},

(2.22) e^{5},

(2.23) e^{-6},

(2.24) $e^{-\frac{2}{3}}$,

(2.25) $e^{\frac{28}{3}}$,

(2.26) e^{2},

(3.1) -2,

(3.2) -5,

(3.3) $\frac{1}{6}$,

(3.4) 4,

(3.5) 32,

(3.6) 4,

(3.7) $\frac{1}{10}$,

(3.8) 8,

(3.9) $\frac{1}{2}$,

(3.10) 12,

(3.11) $\frac{1}{6}$,

(3.12) $\frac{1}{8}$,

(4.1) ∞,

(4.2) $-\infty$,

(4.3) ∞,

(4.4) $-\infty$,

(4.5) $-\infty$,

(4.6) ∞,

(4.7) ∞,

(4.8) ∞,

(5.1) ciągła,

(5.2) nieciągła w punkcie $x = 2$,

(5.3) ciągła,

(5.4) nieciągła w punkcie $x = 0$,

(5.5) nieciągła w punkcie $x = 1$,

(5.6) ciągła,

(5.7) ciągła,

(5.8) ciągła,

(5.9) nieciągła w punkcie $x = 1$,

(6.1) pionowa $x = 2$, pozioma $y = 3$

(6.2) pionowa $x = 1$, pozioma $y = 4$

(6.3) pionowa $x = -3$, pozioma $y = -1$

(6.4) pionowa $x = -1$, pozioma $y = 2$

(6.5) pionowa $x = 5$, pozioma $y = 0$

(6.6) pionowa $x = 1$, pozioma $y = 0$

(6.7) pozioma $y = 3$

(6.8) pozioma $y = -2$

(6.9) pionowa $x = -2$, ukośna $y = 2x - 3$

(6.10) pionowa $x = -1$, ukośna $y = x + 1$

(6.11) ukośna $y = 3x + 1$

(6.10) ukośna $y = 2x + 1$

Rozdział 2.

(1.1) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

(1.2) $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 4x + 6$

(1.3) $f'(x) = 24x^5 - 15x^2 + \cos x - \dfrac{1}{x}$

(1.4) $f'(x) = 15x^4 + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 4e^x$

(1.5) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 6x + 7$

(1.6) $f'(x) = 2\sin x + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

(1.7) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}$

(1.8) $f'(x) = -\dfrac{10}{x^3} - \dfrac{10}{x^6} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(1.9) $f'(x) = \sin x + x\cos x$

(1.10) $f'(x) = (10x + 3)\tan x + (5x^2 + 3x + 1)\dfrac{1}{\cos}$

(1.11) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\dfrac{1}{x}$

(1.12) $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + 3\cos x - 3x\sin$

(1.13) $f'(x) = (x^3 + 5x^2 - x - 4)e^x$

(1.14) $f'(x) = (-4x + 4)\cos x - (-2x^2 + 4x - 3)\,\mathrm{s}$

(1.15) $f'(x) = \dfrac{-7}{(2x-1)^2}$.

(1.16) $f'(x) = \dfrac{25}{(2x+7)^2}$

(1.17) $f'(x) = \dfrac{35x^2 + 10x - 17}{(7x+1)^2}$

(1.18) $f'(x) = \dfrac{-x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{(x^3+1)^2}$

(1.19) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$

(1.20) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan x}{x}$

(1.21) $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{4x^2}$

(1.22) $f'(x) = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$

(2.1) $f'(x) = 15(3x+1)^4$

(2.2) $f'(x) = -35(-5x+4)^6$

(2.3) $f'(x) = 8(x^3 + 2x^2 + x + 3)^7(3x^2 + 4x + 1)$

(2.4) $f'(x) = 6(9x^2 - 3x + 1)^5(18x - 3)$

(2.5) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+1}}6x$

(2.6) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3+4x^2-2x+1}}(3x^2+8x-2)$

(2.7) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x$

(2.8) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+2\cos x}}(-2\sin x)$

(2.9) $f'(x) = \dfrac{1}{1+3x^2}6x$

(2.10) $f'(x) = \dfrac{1}{5x^2-6x+11}(10x-6)$

(2.11) $f'(x) = 3\cos 3x$

(2.12) $f'(x) = -6\sin 2x$

(2.13) $f'(x) = 2\sin x\cos x$

(2.14) $f'(x) = 3\tan^2 x\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(2.15) $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$

(2.16) $f'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(2.17) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}\cos 2x\cdot 2$

(2.18) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{\sin 7x}}\cos 7x\cdot 7$

(2.19) $f'(x) = 3\cos^2 2x(-\sin 2x)\cdot 2$

(2.20) $f'(x) = 3\tan^2 2x\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2$

(2.21) $f'(x) = e^{3x+1}\cdot 3$

(2.22) $f'(x) = e^{3x^2+4x-2}\cdot(6x+4)$

(2.23) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln\left(x^2+x+2\right)}}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+2}\cdot(2x+1$

(2.24) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin 3x}\cos 3x\cdot 3$

(3.1) $y = 4x-4$, $y = 0$, $y = -2x-1$,

(3.2) $y = 5x-2$, $y = -x-5$,

(3.3) $y = -3x+1$,

(3.4) $y = -3x+1$, $y = x+4$,

(3.5) $y = 3x-1$,

(3.6) $y = 4x+1$,

(4.1) Funkcja maleje w $(-\infty, 1)$, $(4, \infty)$, rośnie w $(1, 4)$, minimum w $x = 1$, maksimum w $x = 4$.

(4.2) Funkcja maleje w $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$, rośnie w $(-2, 1)$, minimum w $x = -2$, maksimum w $x = 1$.

(4.3) Funkcja rośnie w $(-\infty, 1)$, $(2, \infty)$, maleje w $(1, 2)$, minimum w $x = 2$, maksimum w $x = 1$.

(4.4) Funkcja rośnie w $(-\infty, -1)$, $(\frac{5}{3}, \infty)$, maleje w $(-1, \frac{5}{3})$, minimum w $x = \frac{5}{3}$, maksimum w $x = -1$.

(4.5) Funkcja maleje w $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, rośnie w $(-1, 0)$, $(1, \infty)$, minimum w $x = -1$ i $x = 1$, maksimum w $x = 0$.

(4.6) Funkcja rośnie w $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, maleje w $(-1, 1)$, minimum w $x = 1$, maksimum w $x = -1$.

(4.7) Funkcja maleje w $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$, brak ekstremów.

(4.8) Funkcja rośnie w $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$, brak ekstremów.

(4.9) Funkcja rośnie w $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$, maleje w $(-2, 0)$, $(0, 2)$, maksimum w $x = -2$, minimum w $x = 2$.

(4.10) Funkcja rośnie w $(-\infty, -2)$, $(8, \infty)$, maleje w $(-2, 3)$, $(3, 8)$, maksimum w $x = -2$, minimum w $x = 8$.

(4.11) Funkcja rośnie w $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$, maleje w $(0, 1)$, $(1, 2)$, maksimum w $x = 0$, minimum w $x = 2$.

(4.12) Funkcja rośnie w $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$, maleje w $(-3, -1)$, $(-1, 1)$, maksimum w $x = -3$, minimum w $x = 1$.

(4.13) Funkcja rośnie w $(-1, 1)$, maleje w $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, maksimum w $x = 1$, minimum w $x = -1$.

(4.14) Funkcja rośnie w $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$, maleje w $(-2, 2)$, maksimum w $x = -2$, minimum w $x = 2$.

(4.15) Funkcja maleje w $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$, brak ekstremów.

(4.16) Funkcja rośnie w $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, brak ekstremów.

(4.17) Funkcja rośnie w zbiorze **R**, brak ekstremów.

(4.18) Funkcja rośnie w zbiorze **R**, brak ekstremów.

(4.19) Funkcja rośnie w $(-\infty, 0)$, maleje w $(0, \infty)$, maksimum w $x = 0$.

(4.20) Funkcja rośnie w $(-\infty, -1)$, maleje w $(-1, \infty)$, maksimum w $x = -1$.

(5.1) Wartość najmniejsza -2, wartość największa 2.

(5.2) Wartość najmniejsza -13, wartość największa 7.

(5.3) Wartość najmniejsza 1, wartość największa $\frac{5}{3}$.

(5.4) Wartość najmniejsza -4, wartość największa 0.

(5.5) Wartość najmniejsza 0, wartość największa 1.

(6.1) $\frac{1}{2}$

(6.2) $\frac{3}{7}$

(6.3) 0

(6.4) $\frac{1}{9}$

(6.5) $\frac{7}{5}$

(6.6) 1

(6.7) 1

(6.8) 1

(6.9) $\frac{3}{2}$

(6.10) $\frac{3}{5}$

(6.11) 2

(6.12) $\frac{5}{3}$

(6.13) $\frac{2}{3}$

(6.14) $\frac{3}{10}$

(6.15) $\frac{2}{3}$

(6.16) $\frac{9}{20}$

(6.17) $\frac{5}{4}$

(6.18) $\frac{1}{3}$

(6.19) $\frac{1}{2}$

(6.20) $\frac{1}{6}$

(6.21) ∞

(6.22) 0

(6.23) 0

(6.24) $\frac{1}{2}$

(6.25) 0

(6.26) 0

Rozdział 3.

(1.1) $x^2 + x + C$

(1.2) $-\dfrac{5}{2}x^2 + 3x + C$

(1.3) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + C$

(1.4) $x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 3x + C$

(1.5) $\dfrac{5}{8}x^8 - \dfrac{3}{5}x^5 + 3x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 11x + C$

(1.6) $-\dfrac{1}{6}x^6 + x^4 - x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(1.7) $\ln|x| + 3x^{-1} - 2x^{-2} + C$

(1.8) $-\dfrac{5}{2}x^{-2} + \dfrac{1}{3}x^{-3} - \dfrac{1}{2}x^{-4} + C$

(1.9) $x - 3\ln|x| - 5x^{-1} + C$

(1.10) $\ln|x| - 2x^{-1} + \dfrac{1}{2}x^{-2} + C$

(1.11) $2x + \ln|x| - 14x^{-1} - \dfrac{7}{2}x^{-2} + C$

(1.12) $2x - 15x^{-1} - \dfrac{7}{3}x^{-3} + C$

(1.13) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(1.14) $\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

(1.15) $-3\cos x + 2\sin x - 3e^x + C$

(1.16) $2x^{\frac{3}{2}} - \tan x + C$

(2.1) 9

(2.2) -4

(2.3) $\frac{4}{3}$

(2.4) 18

(2.5) 0

(2.6) 4

(2.7) 2

(2.8) -6

(2.9) $\dfrac{1}{2}e^2 + e - \dfrac{1}{2}$

(2.10) $\dfrac{7}{2}$

(2.11) $e - \dfrac{1}{3}$

(2.12) 2

(3.1) 4

(3.2) $\dfrac{2}{3}$

(3.3) $\dfrac{20}{3}$

(3.4) $\dfrac{26}{3}$

(3.5) $\dfrac{5}{4}$

(3.6) $\dfrac{27}{4}$

(3.7) $e - 1$,

(3.8) $2\ln 2 + 1$

(4.1) $\dfrac{1}{6}$

(4.2) 8

(4.3) $\dfrac{4}{3}$

(4.4) $\dfrac{32}{3}$

(4.5) $\frac{64}{3}$

(4.6) $\frac{1}{3}$

(4.7) $\frac{1}{3}$

(4.8) 9

(4.9) $\frac{40}{3} - 6\ln 3$

Rozdział 4.

(1.1) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

(1.2) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(1.3) niewykonalne

(1.4) $\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

(1.5) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

(1.6) $\begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ 12 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

(1.7) niewykonalne

(1.8) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 13 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(1.9) niewykonalne

(1.10) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(1.11) $\begin{bmatrix} 24 & -7 & -6 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(1.12) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -24 & 3 \end{bmatrix}$

(1.13) $\begin{bmatrix} -34 & 9 & 3 \\ -42 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

(1.14) $\begin{bmatrix} 13 & 22 \\ -7 & -7 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

(2.1) $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(2.2) $\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2.3) niewykonalne

(2.4) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(2.5) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2.6) niewykonalne

(2.7) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(2.8) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(2.9) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

(2.10) niewykonalne

(2.11) $\begin{bmatrix} 6 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(2.12) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2.13) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & -5 \\ 5 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

(2.14) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

(3.1) 10

(3.2) -4

(3.3) 3

(3.4) 0

(3.5) -4

(3.6) 0

(3.7) 20

(3.8) 1

(3.9) 20

(3.10) 15

(3.11) -85

(3.12) -9

(3.13) 0

(3.14) -2

(3.15) 0

(3.16) 20

(3.17) 0

(3.18) 8

(3.19) 3

(4.1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(4.2) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(4.3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(4.4) $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 2 \\ \mathbf{u} & 11 \\ \mathrm{i} & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

(4.5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(4.6) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(5.1) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(5.2) $X = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

(5.3) $X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(5.4) $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(5.5) $X = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -34 & 25 \end{bmatrix}$

(5.6) $X = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(5.7) $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(5.8) $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(5.9) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(5.10) $X = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(6.1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

(6.2) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

(6.3) układ sprzeczny

(6.4) układ sprzeczny

(6.5) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = 3 \end{cases}$

(6.6) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$

(6.7) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

(6.8) $\begin{cases} x &= -3 \\ y &= 2 \\ z &= 0 \\ t &= 1 \end{cases}$

(6.9) $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \\ t &= 1 \end{cases}$

(6.10) $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \\ t &= 1 \end{cases}$

(6.11) $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \\ t &= -1 \end{cases}$

(6.12) $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \\ t &= -1 \end{cases}$

(6.13) układ sprzeczny

(6.14) układ sprzeczny

(6.15) układ sprzeczny

(6.16) układ sprzeczny

(6.17) $\begin{cases} x &= a + \frac{2}{3} \\ y &= 3a + \frac{1}{3} \\ z &= a \in \mathbf{R} \end{cases}$

$$(6.18)\ \begin{cases} x = -3a+5 \\ y = 5a-7 \\ z = a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(6.19)\ \begin{cases} x = -\frac{3}{2}a+\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}a-\frac{1}{2} \\ z = a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(6.20)\ \begin{cases} x = -4a-14 \\ y = -a-8 \\ z = a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$(6.21)\ \begin{cases} x = a \in \mathbf{R} \\ y = -\frac{6}{5}a+\frac{1}{5} \\ z = b \in \mathbf{R} \\ u = -\frac{1}{15}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{15} \end{cases}$$

(6.22) układ sprzeczny

(6.23) układ sprzeczny

(6.24) układ sprzeczny

$$(6.25)\ \begin{cases} x = a \in \mathbf{R} \\ y = \frac{19}{3}a+\frac{11}{3}b \\ z = b \in \mathbf{R} \\ u = \frac{17}{3}a+\frac{13}{3}b \end{cases}$$

$$(6.26)\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(6.27)\ \begin{cases} x = -\frac{8}{3}a-2b-3c-2 \\ y = -\frac{5}{3}a-b-c-1 \\ z = a \in \mathbf{R} \\ u = b \in \mathbf{R} \\ v = c \in \mathbf{R} \end{cases}$$

(6.28) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(6.29) $\begin{cases} x = -\frac{25}{4} \\ y = \frac{31}{4} \\ z = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$

(6.30) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

(6.31) układ sprzeczny

(6.32) układ sprzeczny

BIBLIOGRAFIA

1. W.Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach,* PWN, Warszawa. 1993.

2. J. Piszczała, *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych,* Wyd. Akad. Ekon., Poznań, 2000.

3. J. Piszczała, *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych, ćwiczenia,* Wyd. Akad. Ekon., Poznań, 1999.

4. M. Sadowski, T. Spanily. *Matematyka w zadaniach dla studentów kierunków ekonomicznych,* Wyd. Uniw. Gda., Gdańsk, 1999.

5. T. Spanily, *Elementy matematyki dla ekonomistów,* Wyższa Szkoła Administracji i Biznesu, Gdynia, 1996.

WYŻSZA SZKOŁA ADMINISTRACJI I BIZNESU
W GDYNI
81-303 Gdynia, ul. Kielecka 7
tel. (0-58) 661 28 00
fax. (0-58) 621 12 70

ISBN 83-918369-0-8